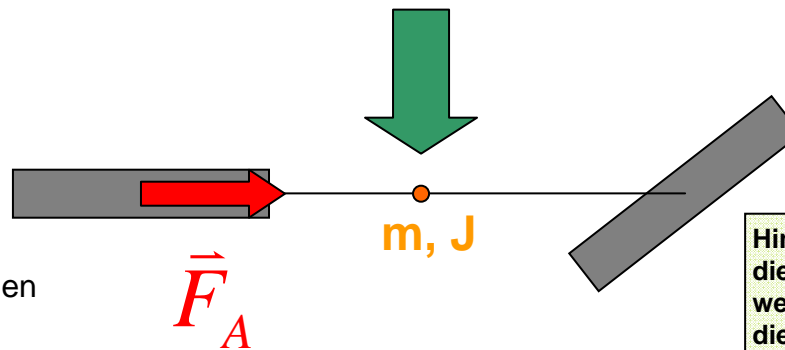
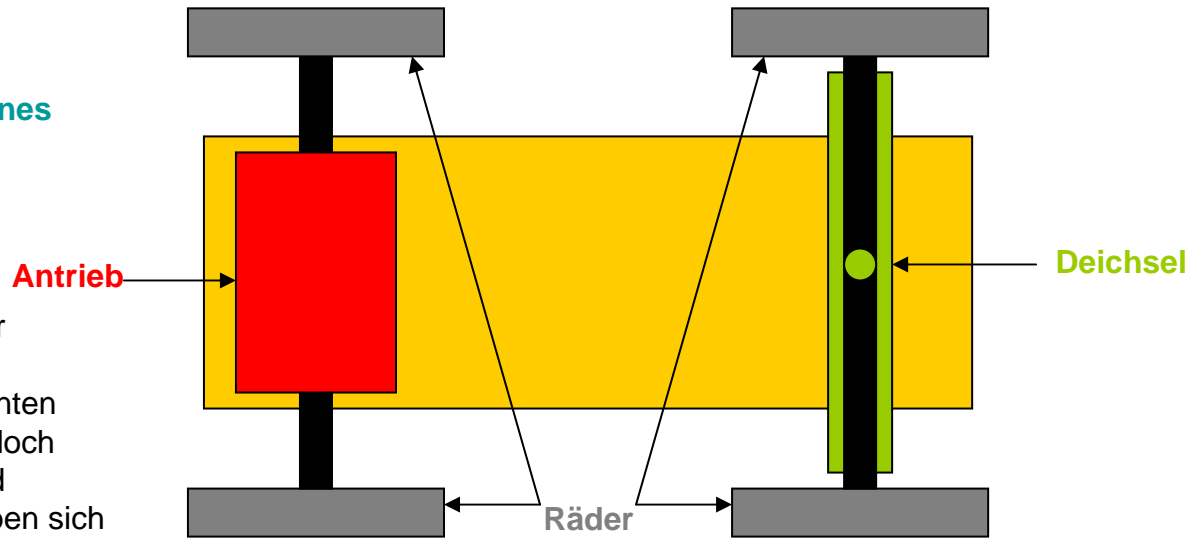


Prinzipieller Aufbau eines COACH-Fahrzeugs:

Bei der Suche nach einer Modellbeschreibung, die noch ganz gut die relevanten Verhältnisse abbildet, jedoch noch halbwegs von Hand erstellt werden kann, haben sich Varianten des Fahrradmodells bewährt.

Reduktion auf Fahrradmodell:

- Die beiden Radachsen schrumpfen jeweils zu einem Rad zusammen.
- Es gibt einen Schwerpunkt mit der Gesamtmasse m und dem rotatorischen Trägheitsmoment J .
- Die Räder sind auch eher Kufen.
- Auf die hintere Kufe wirkt eine Antriebskraft.

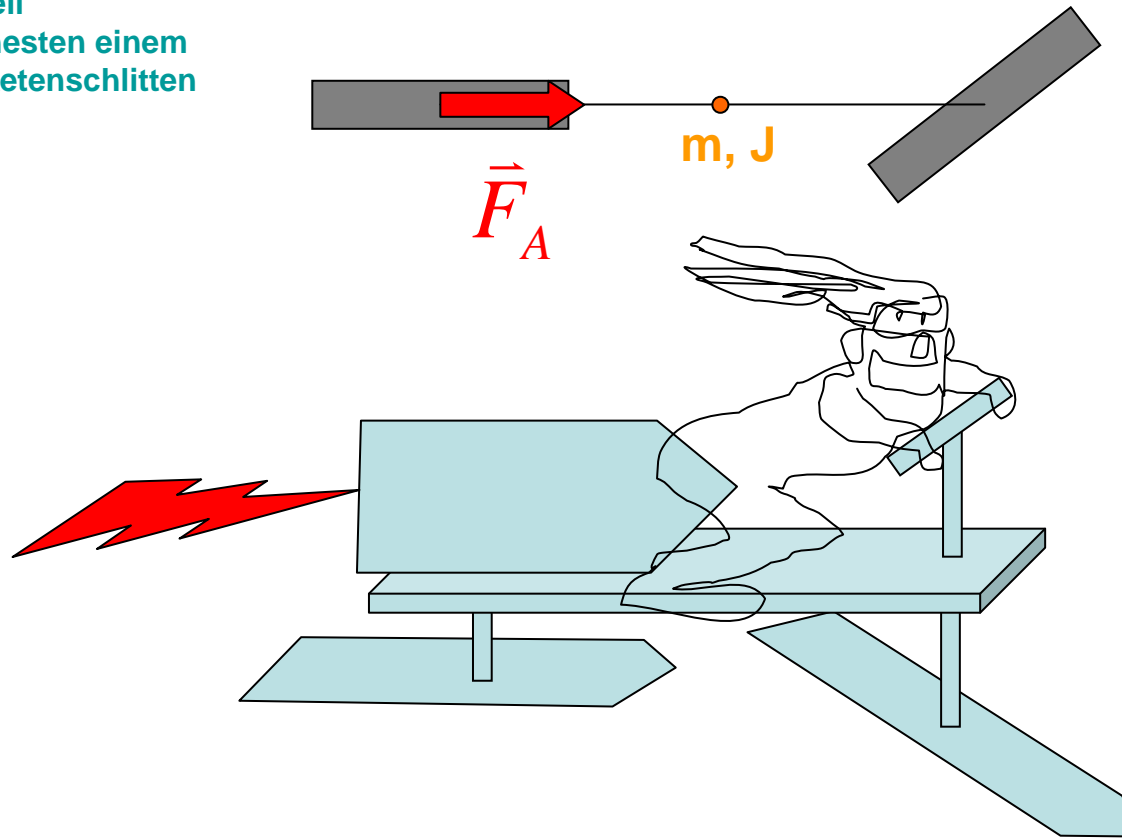


Hinweis: Beziehungen / Gleichungen, die an späterer Stelle weiter verwendet werden, werden mit B und nachfolgend die Foliennummer und eine fortlaufende Nummer bezeichnet. Beispiel:

B.1.2

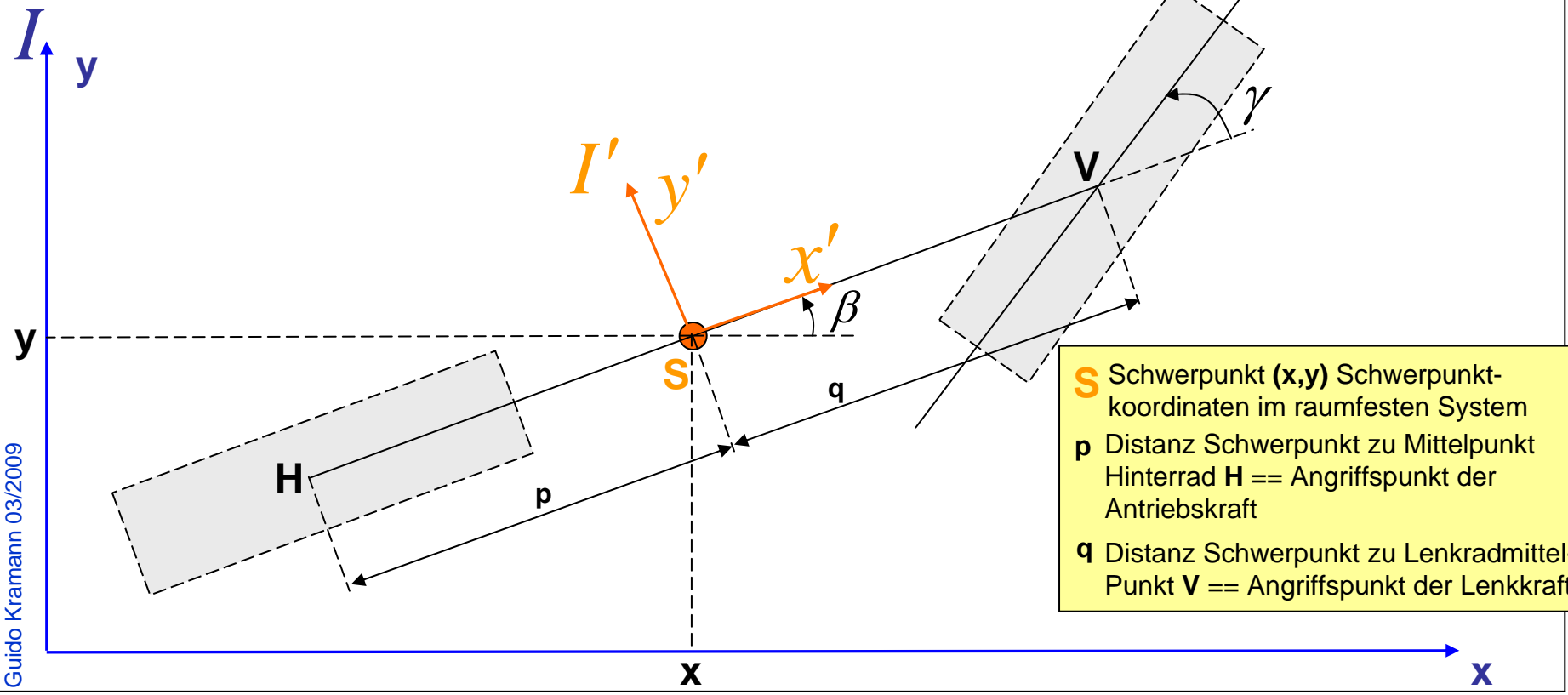
Folie 1 Gleichung 2

Das Fahrradmodell
entspricht am ehesten einem
Zweikufigen Raketenschlitten



Einführung eines Inertialkoordinatensystems und eines Körper eigenen Koordinatensystems und Festlegung der kinematischen und geometrischen Größen:

γ gamma Lenkwinkel Winkel zwischen Chassis und Rad
 β beta Gierwinkel Winkel zwischen raumfestem und körperfestem Koordinatensystem



S Schwerpunkt (x,y) Schwerpunktkoordinaten im raumfesten System
p Distanz Schwerpunkt zu Mittelpunkt Hinterrad H == Angriffspunkt der Antriebskraft
q Distanz Schwerpunkt zu Lenkradmittelpunkt V == Angriffspunkt der Lenkkraft

Ergebnis:

Berechnung der Punkte H und V im ruhenden Koordinatensystem:

Voraussetzung für die nachfolgenden Berechnungen ist es zu wissen, wie man die Lage des Angriffspunktes der Antriebskraft A und den der Lenkraft V im ruhenden Koordinatensystem darstellen kann.

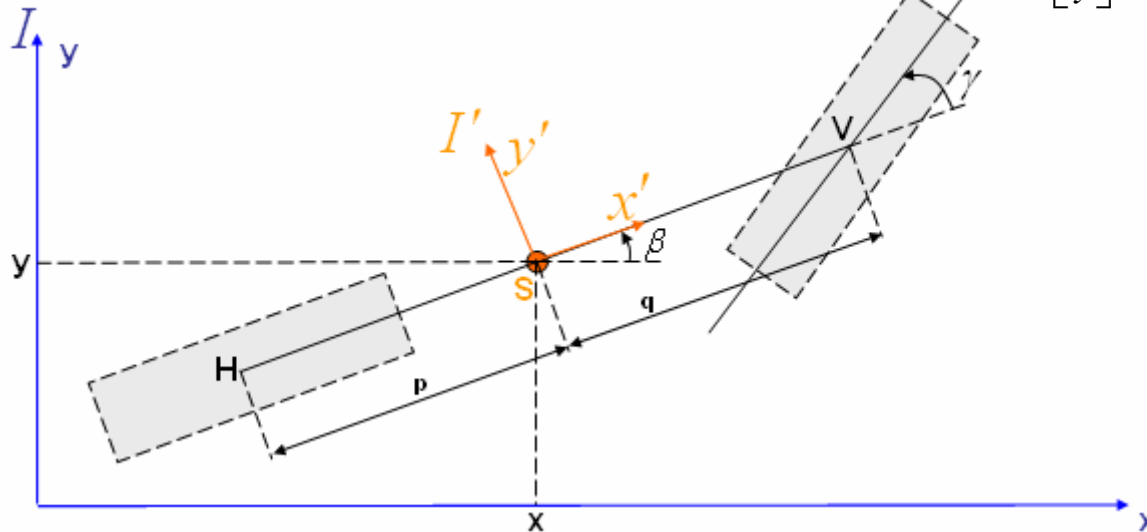
$$\vec{o}_H' = \begin{bmatrix} -p \\ 0 \end{bmatrix}$$

B.4.1
$$\vec{o}_H = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{bmatrix} \cdot \vec{o}_H' = \begin{bmatrix} x - p \cdot \cos \beta \\ y - p \cdot \sin \beta \end{bmatrix}$$

$$\vec{o}_V' = \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix}$$

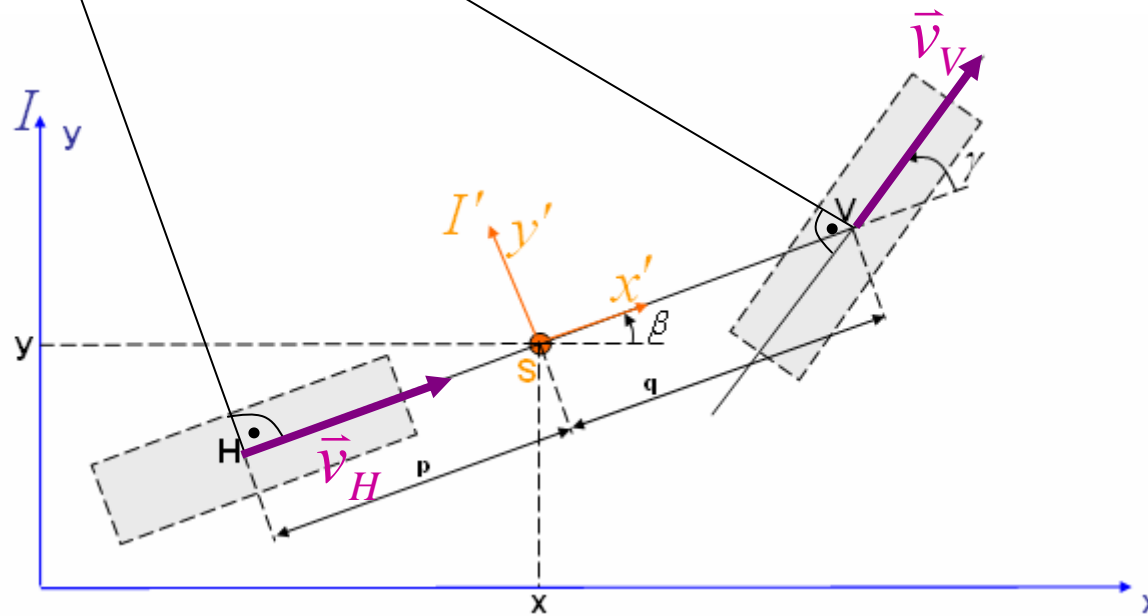
B.4.2
$$\vec{o}_V = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{bmatrix} \cdot \vec{o}_V' = \begin{bmatrix} x + q \cdot \cos \beta \\ y + q \cdot \sin \beta \end{bmatrix}$$

Guido Kramann 03/2009



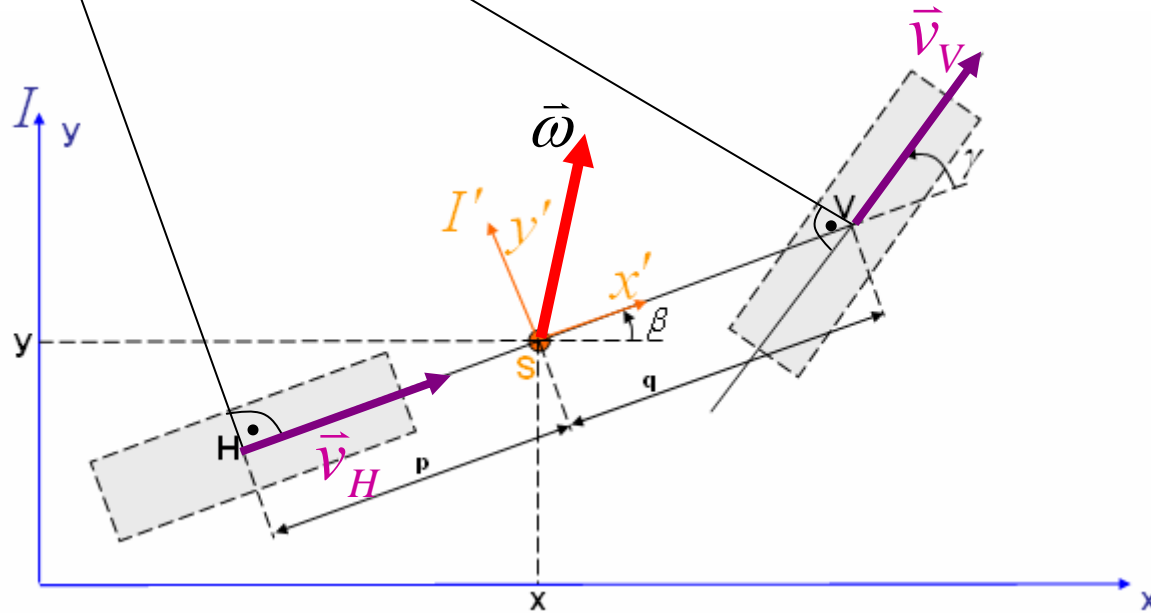
Was passiert, wenn eine konstante Antriebskraft in Fahrzeurlängsrichtung auf das System wirkt?

Unter der Voraussetzung, dass die Momentangeschwindigkeit der Kufen nur in deren Längsrichtung möglich ist, würde sich bei eingeschlagener Lenkkufe ein so genannter Momentanpol L herausbilden, um den das Fahrzeug rotiert. Dieser ergibt sich als Schnittpunkt der Senkrechten auf die Geschwindigkeitsvektoren in H und V. Somit sind die Geschwindigkeiten der Kufen Tangentialgeschwindigkeiten der globalen Drehbewegung und müssen betragsmäßig gleich sein.



Die im Rahmen dieser Veranstaltung bevorzugten Newton-Euler-Gleichungen müßten für den Schwerpunkt des Systems aufgestellt werden. Entsprechend müssen Wege gesucht werden, bei bekannter Schwerpunktsposition und – geschwindigkeit auf die Lage des Momentanpols und die Geschwindigkeitsvektoren in H und V zu schließen. Wie sehen die entsprechenden Berechnungsformeln aus?

ω sei die Winkelgeschwindigkeit im Schwerpunkt, Ω diejenige im Momentanpol. Ihre Vektoren stehen in Richtung der **Z-Achse**.



Lösung: Bestimmung von $\vec{\Omega}$ aus $\vec{\omega}$ und Bestimmung von \vec{v}_H und \vec{v}_V aus

$\vec{\omega}$, \vec{v}_S , (x, y) und β .

B.7.1 Erste Erkenntnis: Es gilt $\vec{\Omega} = \vec{\omega}$. 1. Schritt: Bestimmung des Ortsvektors \vec{r}_L
Ferner gilt:

B.7.2 $\vec{v}_S = \vec{\Omega} \times \vec{r}_{LS}$

B.7.3 $\vec{v}_H = \vec{\Omega} \times \vec{r}_{LH}$

B.7.4 $\vec{v}_V = \vec{\Omega} \times \vec{r}_{LV}$

$$\vec{v}_S = \vec{\Omega} \times \vec{r}_{LS}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{bmatrix} v_{sx} \\ v_{sy} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_{LSx} \\ r_{LSy} \\ 0 \end{bmatrix}$$

\Rightarrow

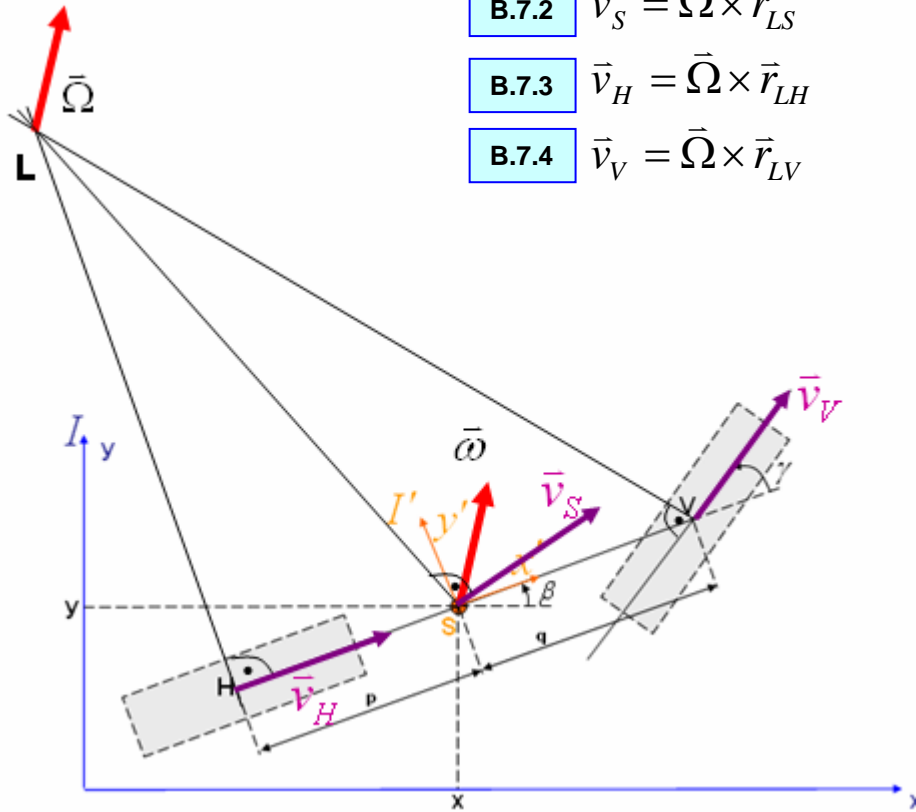
$$v_{sx} = -\omega \cdot r_{LSy}$$

$$v_{sy} = \omega \cdot r_{LSx}$$

\Rightarrow

$$r_{LSx} = \frac{v_{sy}}{\omega}$$

$$r_{LSy} = -\frac{v_{sx}}{\omega}$$



B.7.5

B.7.6

Bei B.8.1 wurde der Ortsvektor zum Punkt L aufgrund des momentanen Bewegungszustandes des Fahrzeugs bestimmt.

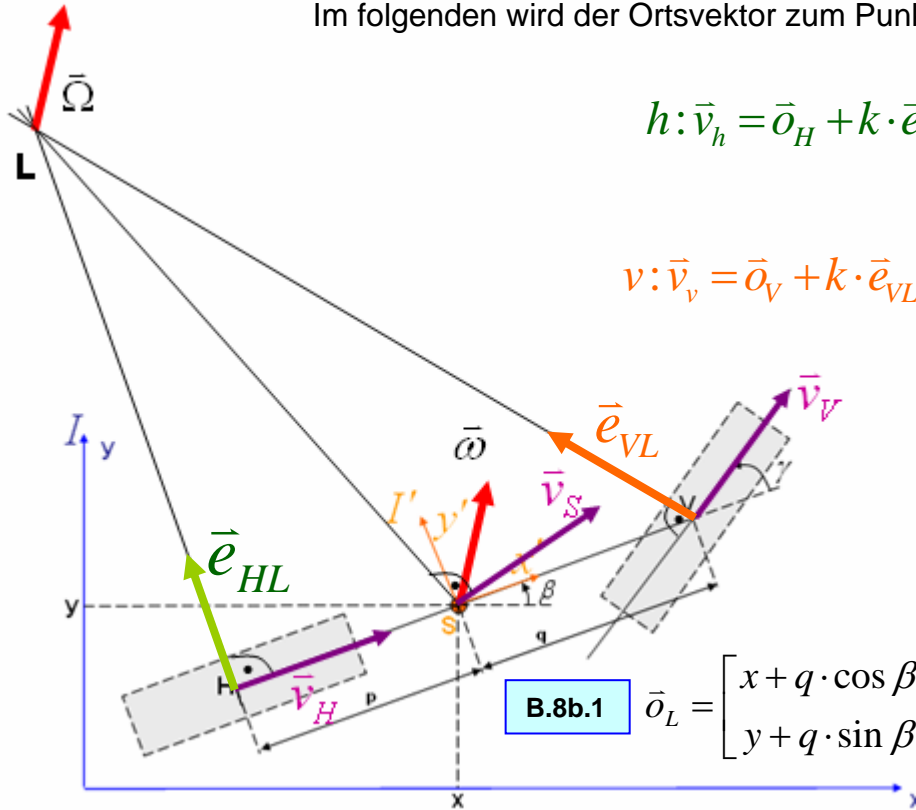
Das ist sozusagen ein Blick in die Vergangenheit.

Soll durch Integration aus den aktuellen Beschleunigungen ein neuer Bewegungszustand ermittelt werden, so liegt es nahe, eher den Momentanpol aufgrund des aktuellen Lenkwinkels zu bestimmen. Insbesondere die wirkenden Zwangskräfte quer zu den Kufen (nächste Folie), sollten aufgrund dieser Momentanpollage berechnet werden.

Im folgenden wird der Ortsvektor zum Punkt L als Schnittpunkt zweier Geraden berechnet:

$$h: \bar{v}_h = \bar{o}_H + k \cdot \bar{e}_{HL} \Leftrightarrow g: \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - p \cdot \cos \beta \\ y - p \cdot \sin \beta \end{bmatrix} + k \cdot \begin{bmatrix} -\sin \beta \\ \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$v: \bar{v}_v = \bar{o}_V + k \cdot \bar{e}_{VL} \Leftrightarrow v: \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + q \cdot \cos \beta \\ y + q \cdot \sin \beta \end{bmatrix} + l \cdot \begin{bmatrix} -\sin(\beta + \gamma) \\ \cos(\beta + \gamma) \end{bmatrix}$$



B.8b.1

$$\bar{o}_L = \begin{bmatrix} x + q \cdot \cos \beta \\ y + q \cdot \sin \beta \end{bmatrix} + \frac{p + q}{\cos \beta \cdot \sin(\beta + \gamma) - \sin \beta \cdot \cos(\beta + \gamma)} \cdot \begin{bmatrix} -\sin(\beta + \gamma) \\ \cos(\beta + \gamma) \end{bmatrix}$$

Verwendung der Zwangsbedingungen, um Bestimmungsgleichungen für die Zwangskräfte aufstellen zu können

Zur Orientierung sollte man sich nun erst einmal Klarheit darüber verschaffen, was bei der Simulation in welcher Reihenfolge berechnet werden soll.

In den beiden Newton-Gleichungen sind die unbekanntten Kräfte F_H und F_V vorhanden. Über Zwangsbedingungen wird nun versucht in den Newtongleichungen die zweite Ableitung der Position zu eliminieren, damit aus ihnen ein Gleichungssystem zur Bestimmung von F_H und F_V wird.

Hierzu erscheinen **B.7.5** und **B.7.6** hilfreich, wenn man diese Beziehungen ableitet:

$$v_{sx} = -\omega \cdot r_{LSy} \Rightarrow \dot{v}_{sx} = -\dot{\omega} \cdot r_{LSy} - \omega \cdot \dot{r}_{LSy}$$

$$v_{sy} = +\omega \cdot r_{LSx} \Rightarrow \dot{v}_{sy} = +\dot{\omega} \cdot r_{LSx} + \omega \cdot \dot{r}_{LSx}$$

$\dot{\omega}$ kann nun die Eulergleichung liefern.

Den Richtungsvektor \vec{r}_{LS} und dessen Ableitung erhält man aus dem Zusammenhang:

$$\vec{r}_{LS} = \vec{o}_S - \vec{o}_L \Rightarrow \dot{\vec{r}}_{LS} = \dot{\vec{o}}_S - \dot{\vec{o}}_L$$

Zur Bestimmung von $\dot{\vec{o}}_L$ wird die Gleichung **B.8b.1** verwendet, denn hier geht zum einen der Lenkwinkel γ ein, zum anderen tauchen hierin keine Geschwindigkeiten mehr auf, was wichtig ist, da sonst beim Ableiten wieder Beschleunigungen da stünden.

B.8b.1: $x, y, \beta, \gamma \Rightarrow \vec{o}_L$

$$x, y, \beta, \gamma, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\beta}, \dot{\gamma} \Rightarrow \dot{\vec{o}}_L$$

Anhand der letzten Beziehung sieht man, dass auch $\dot{\gamma}$ vorgegeben werden muß.

Zwischenbilanz: Einige Bemerkungen zum aktuellen Vorgehen

Hinweis: Problem mit unendlich weit entferntem Momentanpol

Bisher sind wir stets von einem Lenkwinkel ungleich Null ausgegangen.

Im Fall eines verschwindenden Lenkwinkels rückt der Momentanpol ins Unendliche und einige der hergeleiteten Beziehungen bekommen eine Null im Nenner.

Um diesem Umstand zu begegnen, wird es notwendig sein, eine Modellumschaltung zwischen dem Modell mit Lenkwinkel Null und einem mit Lenkwinkel ungleich Null durchzuführen.

Das Modell mit verschwindendem Lenkwinkel ist einfacher und wird im Anschluß noch behandelt.

Hinweis: Kein Rutschen und Schleudern ist mit diesem Modell möglich, immer würden die Zwangskräfte bestimmt werden, die das verhindern. Problematisch wird dieser Ansatz, wenn die Zwangskräfte unrealistisch hoch werden, um ein Weggleiten zu verhindern. Um ein auch für diese Extremsituationen funktionierendes Modell erstellen zu können, muß man sich von der Verwendung von Zwangskräften für F_H und F_V verabschieden und statt dessen diese Querkräfte selbst modellieren.

Zunächst einmal liegt der Momentanpol dann nicht mehr im Schnittpunkt der Radachsen (man überlege sich den Fall des Gleitens auf vereisten Untergrund). Als einfaches Radmodell zur Bestimmung von

F_H und F_V aus anderen Größen, kann angenommen werden, dass diese Kräfte proportional zum Winkel zwischen dem jeweiligen Rad und der Richtung der aktuellen Radgeschwindigkeit ist.

Erfahrungen mit dem realen Vehikel (geradeaus Gleiten bei zu großem Lenkwinkel und zu geringem Achsabstand) und auch das aktuelle Modell mit Zwangskräften, kann helfen, den Proportionalitätsfaktor für den empirischen Modellansatz ohne Zwangskräfte sinnvoll zu wählen.

Verwendung der Zwangsbedingungen, um Bestimmungsgleichungen für die Zwangskräfte aufstellen zu können (Durchführen der Berechnungen nach dem Schema von Folie 11)

Sind erst einmal die Zwangsbedingungen nach dem Schema von Folie 11 bestimmt, so kann sehr leicht der nächste Integrationsschritt durchgeführt werden.

Im folgenden soll nun das Schema zur Bestimmung der Zwangskräfte umgesetzt werden.

Es ergeben sich dabei sehr unübersichtliche Ausdrücke. Jedoch ist es wie gesagt ein Schema, das man nur diszipliniert umsetzen muß. Die Auswertung der Terme wird später durch ein Simulationsprogramm erledigt.

Zur leichteren Einsicht der Sinnhaftigkeit der einzelnen Berechnungsschritte, wird die Bestimmung der Zwangskräfte „rekursiv“ durchgeführt, d.h. wir beginnen bei den Newton-Gleichungen und fügen nach und nach die noch fehlenden Beziehungen ein.

$$\text{B.10.1} \quad m\dot{v}_{sx} = F_A \cdot \cos \beta + F_H \cdot eLHx + F_V \cdot eVLx$$

$$\text{B.10.2} \quad m\dot{v}_{sy} = F_A \cdot \sin \beta + F_H \cdot eLHy + F_V \cdot eVLy$$

⇔ Lineares Gleichungssystem zur
Bestimmung der Zwangskräfte:

$$\begin{bmatrix} eLHx & eVLx \\ eLHy & eVLy \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_H \\ F_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \cdot \dot{v}_{sx} - F_A \cdot \cos \beta \\ m \cdot \dot{v}_{sy} - F_A \cdot \sin \beta \end{bmatrix}$$

$$\dot{v}_{sx} = ?, \dot{v}_{sy} = ?$$

Verwendung der Zwangsbedingungen, um Bestimmungsgleichungen für die Zwangskräfte aufstellen zu können (Durchführen der Berechnungen nach dem Schema von Folie 11) **Fortsetzung**

B.7.5 $v_{sx} = -\omega \cdot r_{LSy} \Rightarrow \dot{v}_{sx} = -\dot{\omega} \cdot r_{LSy} - \omega \cdot \dot{r}_{LSy}$

B.7.6 $v_{sy} = +\omega \cdot r_{LSx} \Rightarrow \dot{v}_{sy} = +\dot{\omega} \cdot r_{LSx} + \omega \cdot \dot{r}_{LSx}$
 $\bar{r}_{LS} = \bar{o}_S - \bar{o}_L \Rightarrow \dot{\bar{r}}_{LS} = \dot{\bar{o}}_S - \dot{\bar{o}}_L$

$\bar{o}_S = ?, \dot{\bar{o}}_S = ?, \bar{o}_L = ?, \dot{\bar{o}}_L = ?, \dot{\omega} = ?$

$$\bar{o}_S = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \dot{\bar{o}}_S = \begin{bmatrix} v_{sx} \\ v_{sy} \end{bmatrix}$$

B.8b.1 $\bar{o}_L = \begin{bmatrix} x_L \\ y_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + q \cdot \cos \beta \\ y + q \cdot \sin \beta \end{bmatrix} + \frac{p+q}{\cos \beta \cdot \sin(\beta + \gamma) - \sin \beta \cdot \cos(\beta + \gamma)} \cdot \begin{bmatrix} -\sin(\beta + \gamma) \\ \cos(\beta + \gamma) \end{bmatrix}$

B.14.1 $NN = \cos \beta \cdot \sin(\beta + \gamma) - \sin \beta \cdot \cos(\beta + \gamma)$

B.14.2 $DNN = -\omega \sin \beta \cdot \sin(\beta + \gamma) + (\omega + \dot{\gamma}) \cos \beta \cdot \cos(\beta + \gamma) \dots$
 $\dots - \omega \cos \beta \cos(\beta + \gamma) + (\omega + \dot{\gamma}) \sin \beta \sin(\beta + \gamma)$

B.14.3 $\dot{\bar{o}}_L = \begin{bmatrix} \dot{x}_L \\ \dot{y}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{sx} - \omega \cdot q \cdot \sin \beta \\ v_{sy} + \omega \cdot q \cdot \cos \beta \end{bmatrix} + \frac{p+q}{NN^2} \cdot \begin{bmatrix} -(\omega + \dot{\gamma}) \cos(\beta + \gamma) \cdot NN + \sin(\beta + \gamma) \cdot DNN \\ -(\omega + \dot{\gamma}) \sin(\beta + \gamma) \cdot NN - \cos(\beta + \gamma) \cdot DNN \end{bmatrix}$

Verwendung der Zwangsbedingungen, um Bestimmungsgleichungen für die Zwangskräfte aufstellen zu können (Durchführen der Berechnungen nach dem Schema von Folie 11) **Fortsetzung**

$\dot{\omega} = ?$... aus Eulergleichung:

B.10.3 $J \cdot \dot{\omega} = F_H \cdot p + F_V \cdot q \cdot (eVLy \cdot \cos \beta - eVLx \cdot \sin \beta)$

Alles, was hier steht ist bekannt, außer F_H und F_V . Deswegen aber ändert sich das Gleichungssystem zur Bestimmung der Zwangskräfte noch einmal.

Unter Einbeziehung der gefundenen Ersetzungen ergibt sich nun:

mit

$$\dot{v}_{sx} = -\dot{\omega} \cdot (y - y_L) - \omega \cdot (\dot{y} - \dot{y}_L) \quad \begin{bmatrix} eLHx & eVLx \\ eLHy & eVLy \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_H \\ F_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \cdot \dot{v}_{sx} - F_A \cdot \cos \beta \\ m \cdot \dot{v}_{sy} - F_A \cdot \sin \beta \end{bmatrix}$$

$$\dot{v}_{sy} = +\dot{\omega} \cdot (x - x_L) + \omega \cdot (\dot{x} - \dot{x}_L)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} eLHx & eVLx \\ eLHy & eVLy \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_H \\ F_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\omega} \cdot m \cdot (y - y_L) - \omega \cdot m \cdot (\dot{y} - \dot{y}_L) - F_A \cdot \cos \beta \\ +\dot{\omega} \cdot m \cdot (x - x_L) + \omega \cdot m \cdot (\dot{x} - \dot{x}_L) - F_A \cdot \sin \beta \end{bmatrix}$$

B.15.1 Mit der Substitution $MM = eVLy \cdot \cos \beta - eVLx \cdot \sin \beta$ und **B.10.3** folgt $\dot{\omega} = F_H \cdot \frac{p}{J} + F_V \cdot \frac{q \cdot MM}{J}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} eLHx & eVLx \\ eLHy & eVLy \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_H \\ F_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(F_H \cdot \frac{p}{J} + F_V \cdot \frac{q \cdot MM}{J}) \cdot m \cdot (y - y_L) - \omega \cdot m \cdot (\dot{y} - \dot{y}_L) - F_A \cdot \cos \beta \\ +(F_H \cdot \frac{p}{J} + F_V \cdot \frac{q \cdot MM}{J}) \cdot m \cdot (x - x_L) + \omega \cdot m \cdot (\dot{x} - \dot{x}_L) - F_A \cdot \sin \beta \end{bmatrix}$$

Verwendung der Zwangsbedingungen, um Bestimmungsgleichungen für die Zwangskräfte aufstellen zu können (Durchführen der Berechnungen nach dem Schema von Folie 11) **Fortsetzung**

Durch Sortieren der Bekannten und Unbekannten Größen erhält man schließlich:

$$\begin{bmatrix} eLHx + m \cdot (y - y_L) \cdot \frac{p}{J} & eVLx + m \cdot (y - y_L) \cdot \frac{q \cdot MM}{J} \\ eLHy - m \cdot (x - x_L) \cdot \frac{p}{J} & eVLy - m \cdot (x - x_L) \cdot \frac{q \cdot MM}{J} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_H \\ F_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega \cdot m \cdot (\dot{y} - \dot{y}_L) - F_A \cdot \cos \beta \\ +\omega \cdot m \cdot (\dot{x} - \dot{x}_L) - F_A \cdot \sin \beta \end{bmatrix}$$

Ersetzungen:

$eLHx$

B.8.2

B.9.2

$eLHy$

$eVLx$

B.8.3

B.9.3

$eVLy$

MM

B.15.1

B.8.3

B.9.3

x_L

B.8b.1

y_L

\dot{x}_L

B.14.1

B.14.2

B.14.3

\dot{y}_L

Entwicklung eines Scilab-Modells auf Grundlage der gewonnenen Gleichungen.

Als erster Test wird das Modell für eine konstante Antriebskraft F_A und einen festen Lenkwinkel $\gamma \neq 0$ modelliert. Dadurch wird $\dot{\gamma} = 0$.

Nach dem Erreichen eines eingeschwungenen Zustands, sollte das Modell eine Kreisfahrt mit konstantem Radius vollführen. Dieses erwartete Verhalten soll als erste Validierung des Modells dienen.

Damit das Modell gut lesbar wird, wird im folgenden die Umschrift der hier zuvor verwendeten Formelsymbole im Scilab-Programm dargestellt:

Ein Integrationsschritt soll durch Bestimmung der aktuellen rechten Seite in einer Funktion mit dem Namen **rechteSeite(...)** erfolgen. Das Ergebnis dieser Berechnung wird in einem Array mit dem Namen **f** abgelegt und zurückgegeben.

Der **Systemzustand y** ist ein Array und enthält:

Modell	Scilab	Scilab alternativ
x	$y(1)$	xs
y	$y(2)$	ys
β	$y(3)$	$beta$
v_{sx}	$y(4)$	vsx
v_{sy}	$y(5)$	vsy
ω	$y(6)$	$omega$

Äußere Einflußgrößen werden in Scilab in dem Array **u** gespeichert:

Modell	Scilab	Scilab alternativ
γ	$u(1)$	$gamma$
$\dot{\gamma}$	$u(2)$	$dgamma$
F_A	$u(3)$	FA

Parameter werden in Scilab in dem Array **param** gespeichert:

Modell	Scilab	Scilab alternativ
m	$param(1)$	m
J	$param(2)$	J
p	$param(3)$	p
q	$param(4)$	q

Kinematische Größen

Modell	Scilab	Modell	Scilab
\vec{o}_H	oH	\vec{r}_{LH}	rLH
x_H	xH	\vec{r}_{LV}	rLV
y_H	yH	\vec{v}_V	vV
\vec{o}_V	oV	\vec{v}_H	vH

Substitutionen

Modell	Scilab	Modell	Scilab
x_V	xV	$eLHx$	$eLHx$
y_V	yV	$eLHy$	$eLHy$
\vec{o}_L	oL	$eVLx$	$eVLx$
x_L	xL	$eVLy$	$eVLy$
y_L	yL	NN	NN
$\dot{\vec{o}}_L$	doL	DNN	DNN
\dot{x}_L	dxL	MM	MM
\dot{y}_L	dyL		

COACH Mechanik
Variante Folie

Guido Kramann 03/2009

