

Vorlesung 8

- Numerische Verfahren
 - Die numerische Funktion
 - Ableitung
 - Integration

Numerische Verfahren: eine Funktion

- Mathematisch betrachtet eine Funktion ist Eine reelle Funktion f ist eine Abbildung von den reellen Zahlen in die reellen Zahlen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ normalerweise als Formel gegeben:

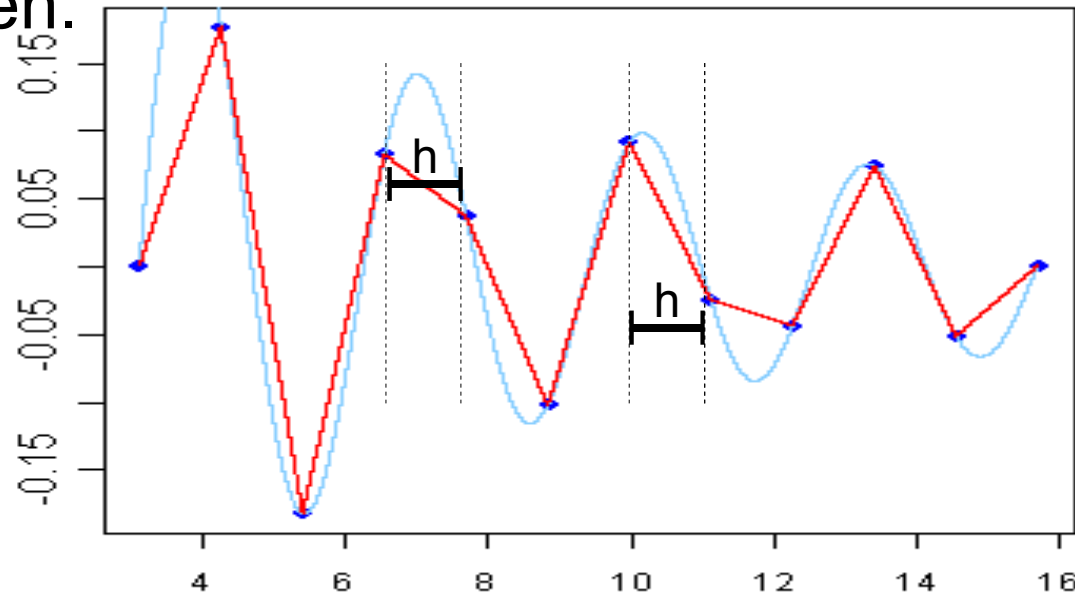
$$y = f(x) = \sqrt{e^{\sin(x)}} + x$$

- Numerisch betrachtet eine Funktion ist eine Tabelle von Werten

x	f(x)
0.1	1.151184
0.2	1.304436
0.3	1.459235
0.4	1.614958
0.5	1.770884

Numerische Verfahren: eine Funktion

- Die Wertetabelle einer Funktion besteht sehr oft (aber nicht immer) aus gleichweit entfernten Werten. In diesem Fall sind die Formeln der numerischen Verfahren einfacher zu Berechnen.



Die Formeln beim gleichweit entfernten Werte hängen von dieser konstanten Schrittweite h . Ansonsten muss man die Werte aller Punkte betrachten.

Numerische Verfahren: Ableitung

- Die Ableitung in t_k ist die Steigung der Tangente genau in diesem Punkt. Das heißt, der Grenzwert der Formel

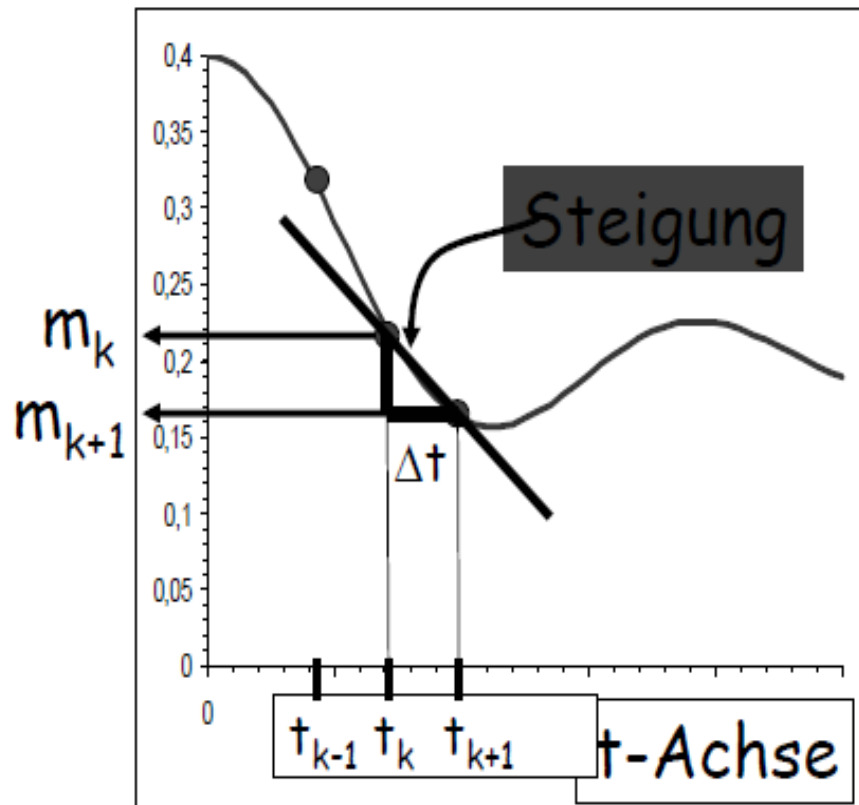


Bild: Bernd Hitzmann

$$m'_k = m'(t_k) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m(t_k + \Delta t) - m(t_k)}{\Delta t},$$

wo $\Delta t = t_{k+1} - t_k$

$$\begin{aligned} & \text{also} \\ &= \lim_{t_{k+1} \rightarrow t_k} \frac{m(t_{k+1}) - m(t_k)}{t_{k+1} - t_k} \\ &= \lim_{t_{k+1} \rightarrow t_k} \frac{m_{k+1} - m_k}{t_{k+1} - t_k} \end{aligned}$$

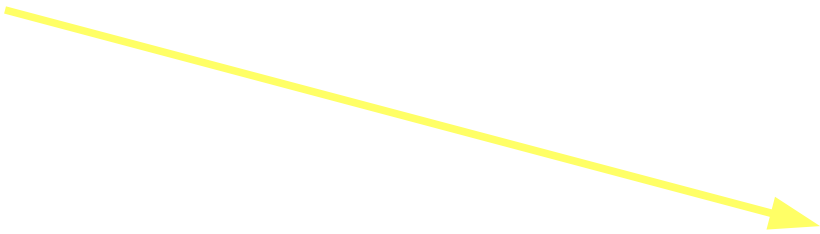
Numerische Verfahren: Ableitung

Vorwärts Differenz

- Aus der letzte Formel können wir eine Annäherung für die Ableitung erhalten.

$$m_k' \approx \frac{m_{k+1} - m_k}{t_{k+1} - t_k}$$

Diese Formel heißt Vorwärts Differenz, weil das vorangehendes Element (t_{k+1}) verwendet wird



t	m
t_0	m_0
...	...
t_{k-1}	m_{k-1}
t_k	m_k
t_{k+1}	m_{k+1}
...	...
t_n	m_n

Numerische Verfahren: Ableitung

Rückwärts Differenz

- Aus der letzte Formel können wir eine Annäherung für die Ableitung erhalten.

$$m'_k \approx \frac{m_k - m_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}$$

Diese Formel heißt Rückwärts Differenz, weil das nachgehendes Element (t_{k-1}) verwendet wird

t	m
t_0	m_0
...	...
t_{k-1}	m_{k-1}
t_k	m_k
t_{k+1}	m_{k+1}
...	...
t_n	m_n

Numerische Verfahren: Ableitung

Zentrierte Differenz

- Mann kann auch eine symmetrische Formeln erstellen mit den Werten vor und nach meinem untersuchten Wert t_k
- So erhält man einen stabileren Wert und dadurch eine genauere Annäherung.

$$m'_{\text{zentriert } k} \approx \frac{m_{k+1} - m_{k-1}}{t_{k+1} - t_{k-1}}$$

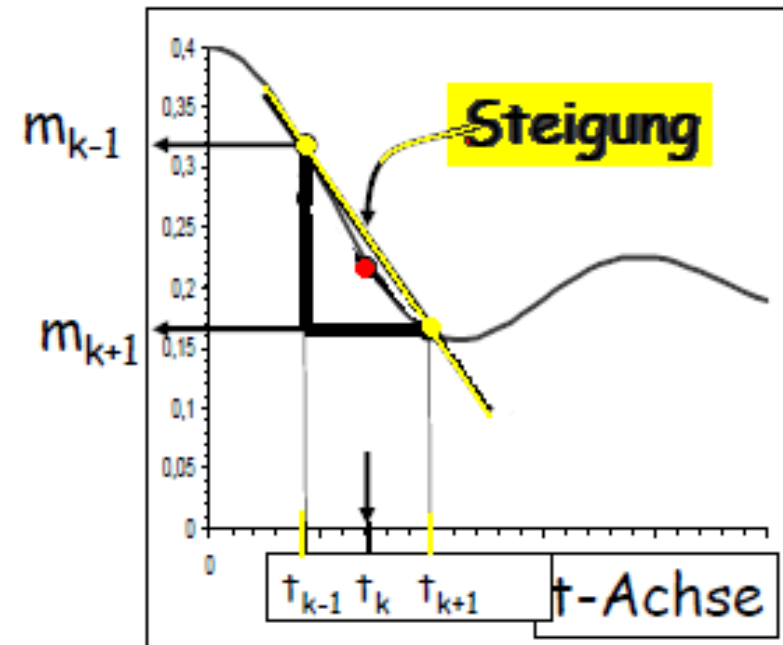
t	m
t_0	m_0
...	...
t_{k-1}	m_{k-1}
t_k	m_k
t_{k+1}	m_{k+1}
...	...
t_n	m_n

Numerische Verfahren: Ableitung

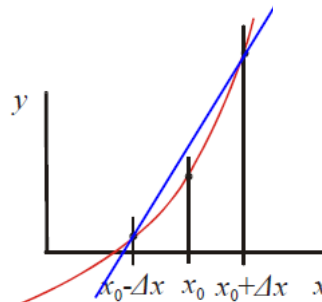
Zentrierte Differenz

- Man kann auf dem Bild einsehen, warum die Formel „zentriert“ genannt wird.

$$m'_{\text{zentriert } k} = \frac{m_{k+1} - m_{k-1}}{t_{k+1} - t_{k-1}}$$



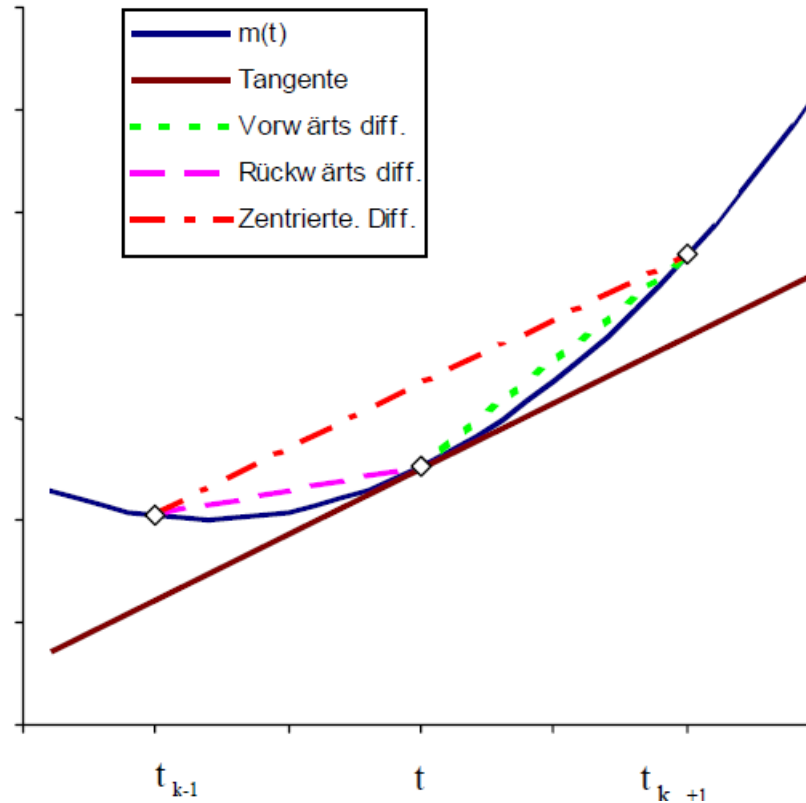
- So sieht aus die Steigung der zentrierten Differenz für einer Funktion $y(x)$



Numerische Verfahren: Ableitung

Übersicht

- Eine Veranschaulichung mit den Steigungen der drei Methoden und die richtige Tangente.



Numerische Verfahren: Integration

Gesucht ist das
Integral

$$\int_a^b f(x) dx = ?$$

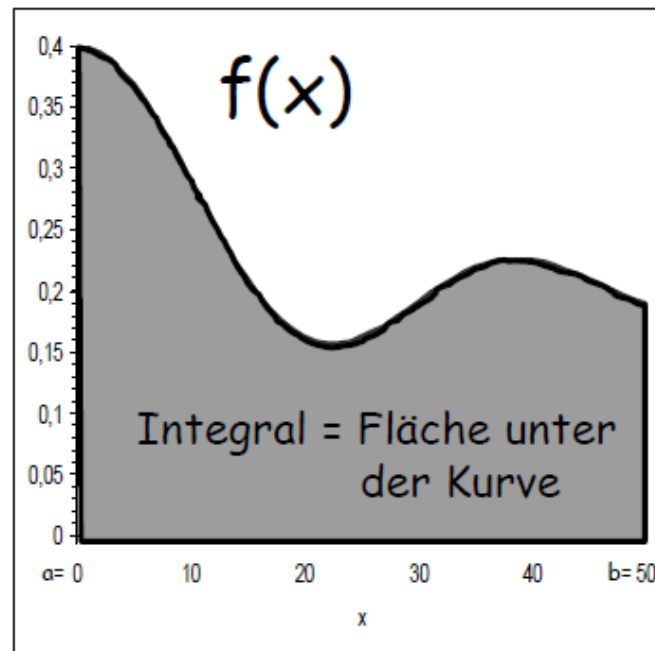


Bild: Bernd Hitzmann

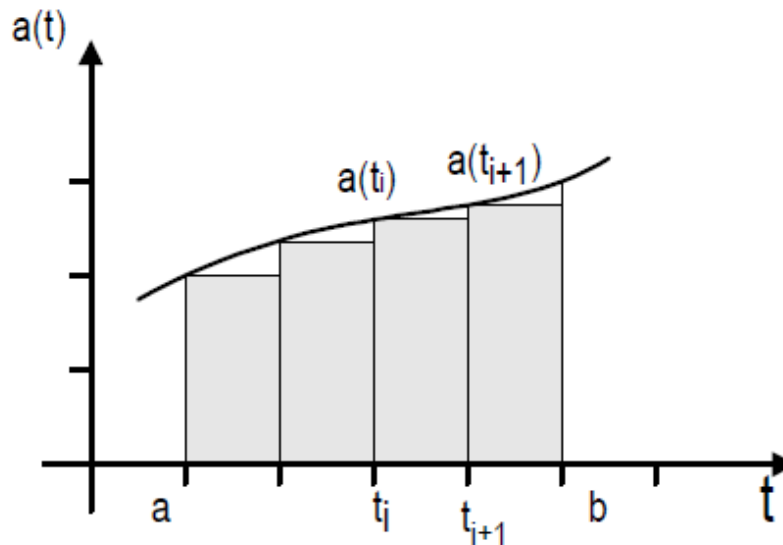
Numerische Verfahren: Integration

- Wir möchten im Intervall $[a, b]$ $f(t)$ integrieren
- Dafür haben wir $N+1$ Punkte aus der Funktion
 $N+1$ Paaren $(t_i, f(t_i))$

Von $(t_0, f(t_0))$ bis $(t_N, f(t_N))$ wo $t_0 = a$ und $t_N = b$

Numerische Verfahren: Integration

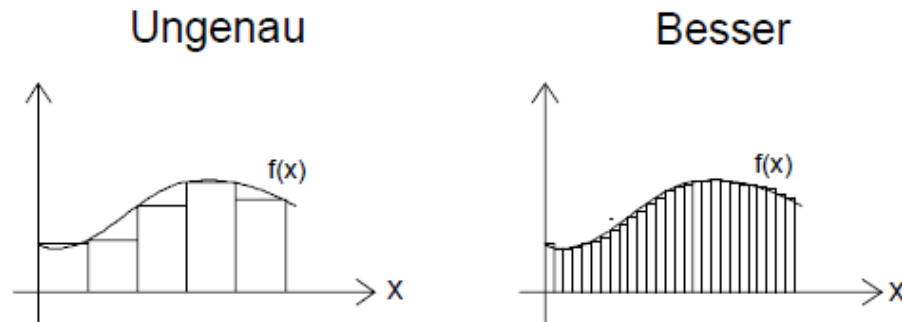
- Rechteck Annäherung:
das gröbste Verfahren.
- Vorsicht: Der letzte Punkt $t_n = b$ kommt nicht in der Formel vor



$$I = \sum_{i=0}^{i \leq n-1} a(t_i) \frac{(t_{i+1} - t_i)}{2}$$

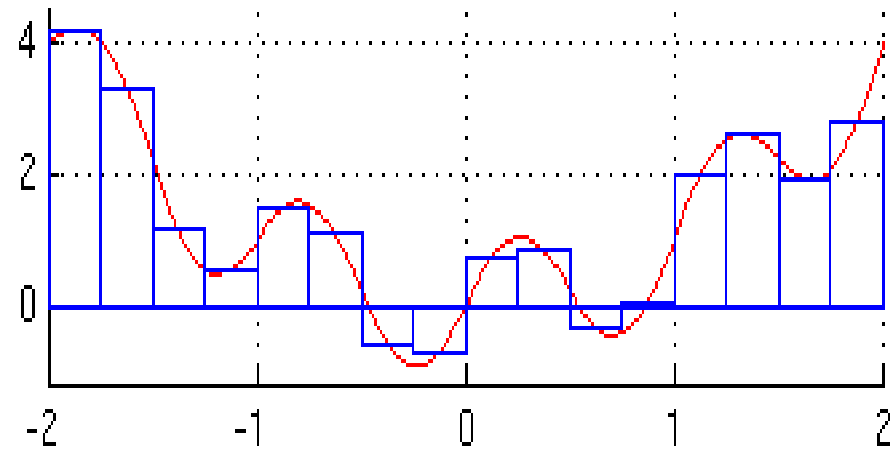
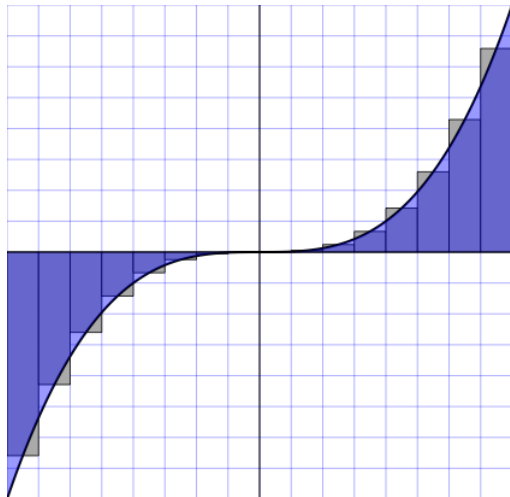
Numerische Verfahren: Integration

- Die Anzahl von Punkten ist entscheidend: Wie beim allen numerischen Verfahren, sollte die Berechnung desto genauer, je mehr Punkte vorhanden sind.
- Das ist wahr bis auf dem Moment wo die Rundungsfehler wegen der endlichen Genauigkeit der Gleitkommazahlen genug groß werden.



Numerische Verfahren: Integration

- Integration durch Rechteck im Mittelpunkt
Auch genannt **MacLaurin** Verfahren.
- Man nimmt ein Rechteck, das auf jedem Punkt t_i zentriert ist. Siehe die 2 Abbildungen



- Die Formel ist:

$$I = a(t_0) \frac{(t_0 - t_1)}{2} + \sum_{i=1}^{i \leq n-1} a(t_i) \frac{(t_{i+1} - t_{i-1})}{2} + a(t_n) \frac{(t_n - t_{n-1})}{2}$$

Für die Punkte $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n$
der Funktion $a(t)$